§ TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE em eletromagnetismo

O Hamiltoniano de uma partícula carregada de carga elétrica e na presença de um campo eletromagnético $(\phi, \vec{A})$ é:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi(\vec{x}), \qquad (1)$$

onde ϕ e $\vec{A}$ são funções do operador posição $\vec{x}$, portanto $\vec{p}$ e $\vec{A}$ em geral não comutam:

$$\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = p^2 + \frac{e^2}{c^2}A^2 - \frac{e}{c}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right).$$

Calculemos o comutador

$$\vec{p}\cdot\vec{A} = \sum_{i=1,2,3} p_i A_i(\vec{x})$$

Lembrar que $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

Assim:

$$[\hat{x}^2, \hat{p}_x] = \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x} = 2i\hbar\hat{x}$$

$$[\hat{x}^n, \hat{p}_x] = n i\hbar\,\hat{x}^{n-1} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\hat{x}^n$$

Para uma função arbitrária de x temos:

$$[\hat{p}_x, f(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x})$$

$$\hat{p}_i \hat{A}_i = \hat{A}_i \hat{p}_i + [\hat{p}_i, \hat{A}_i] = \hat{A}_i \hat{p}_i - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$$

Portanto:

$$\vec{p}\cdot\vec{A} = \sum_i \hat{p}_i \hat{A}_i = \sum_i \left(\hat{A}_i \hat{p}_i - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} A_i\right)$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{p} - i\hbar\, \nabla\cdot\vec{A},$$

e num gauge onde $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ (gauge de Coulomb), $\vec{A}$ e $\vec{p}$ comutam.

Para estudar a dinâmica de uma partícula carregada formulamos a equações de movimento **na versão de Heisenberg**:

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}_i, \hat{H}] = \frac{1}{m}\left(\hat{p}_i - \frac{e}{c}\hat{A}_i\right)$$

$\vec{p}$ é momentum canônico e <u>não</u> corresponde com $m\frac{d\vec{x}}{dt}$.

O momentum mecânico é portanto:

$$\vec{\Pi} = m\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Para o momentum canônico temos $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, Coisa que não acontece com as componentes de $\vec{\Pi}$:

$$[\Pi_i, \Pi_j] = [p_i - \frac{e}{c}A_i, p_j - \frac{e}{c}A_j]$$

$$= -\frac{e}{c}[p_i, A_j] + \frac{e}{c}[p_j, A_i]$$

$$= \frac{i\hbar e}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A_j - \frac{\partial}{\partial x_j}A_i\right) = \frac{i\hbar e}{c}\,\epsilon_{ijk}B_k$$

com $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ sendo o campo magnético. Escrevemos o Hamiltoniano em termos de $\vec{\Pi}$:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\vec{\Pi}^2 + e\phi,$$

com $m\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \Pi_i = \frac{m}{i\hbar}[\hat{x}_i, \hat{\mathcal{H}}] = p_i - \frac{e}{c}A_i$.

Assim:

$$\frac{d^2\hat{x}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\hat{x}_i}{dt}\right) = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{d\hat{x}_i}{dt}, \hat{\mathcal{H}}\right]$$

$$= \frac{1}{im\hbar}\left[\hat{\Pi}_i, \hat{\mathcal{H}}\right]$$

$$= \frac{1}{im\hbar}\left(\sum_j [\Pi_i, \Pi_j^2]\frac{1}{2m} + [\Pi_i, e\phi]\right)$$

$$[\Pi_i, \Pi_j^2] = [\Pi_i, \Pi_j]\Pi_j + \Pi_j[\Pi_i, \Pi_j]$$

$$= \frac{i\hbar e}{c}\,\epsilon_{ijk}(B_k\Pi_j + \Pi_j B_k)$$

$$[\Pi_i, e\phi] = e\left[p_i - \frac{e}{c}A_i, \phi\right] = e\,[p_i, \phi]$$

$$= -i\hbar e \frac{\partial}{\partial x_i}\phi$$

$$[\vec{\Pi}, e\phi] = -i\hbar e \nabla\phi = i\hbar e \vec{E}$$

Logo:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\sum_i \hat{e}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

$$= m\sum_{ij} \hat{e}_i \frac{e}{c}\epsilon_{ijk}\left(B_k\frac{dx_j}{dt} + \frac{dx_j}{dt}B_k\right)\frac{1}{2m} + e\vec{E}$$

$$= \sum_{ij}\frac{e}{2c}\hat{e}_i\left(\epsilon_{ijk}\frac{dx_j}{dt}B_k - \epsilon_{ikj}B_k\frac{dx_j}{dt}\right) + e\vec{E},$$

e a versão quântica de força de Lorentz é

$$\boxed{m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = e\left\{\vec{E} + \frac{1}{2c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{B} - \vec{B}\times\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\right\}}$$

Na versão de Schrödinger:

Se escrevermos $\psi(\vec{x},t) \equiv \langle\vec{x}|\psi,t\rangle$, da eq. de Schrödinger

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi\right]|\psi,t\rangle = i\hbar\,\partial_t|\psi,t\rangle$$

segue a equação de continuidade para a densidade de probabilidade:

$$\rho(\vec{x},t) \equiv |\psi(\vec{x},t)|^2 = \psi^*(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t)$$

Esta relação é obtida facilmente notando que em ausência de campos, a densidade de corrente se escreve como:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left(\psi^* \nabla \psi\right) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\psi^*(-i\hbar \nabla \psi) + \psi(i\hbar \nabla \psi^*)}{2}$$

$$= \frac{1}{m} \frac{\psi^*(-i\hbar \nabla \psi) + \psi(-i\hbar \nabla \psi)^*}{2}$$

$$= \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left[\psi^*(-i\hbar \nabla \psi)\right] = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left(\psi^* \vec{p}\, \psi\right).$$

Com campo, devemos substituir $\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$, de maneira que a corrente fica:

$$\vec{J} = \frac{1}{m} \mathrm{Re}\left[\psi^*\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi\right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left(\psi^* \nabla \psi\right) - \frac{e}{mc}\vec{A}\,|\psi|^2$$

na forma usual

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \ ,$$

com a densidade de corrente dada por

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\, \mathrm{Im}(\psi^* \nabla \psi) - \frac{e}{mc}\vec{A}|\psi|^2$$

Discutimos agora as transformações de gauge (calibre) que deixam as equações de Maxwell invariantes:

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} \ , \\ \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda \ , \end{cases}$$

pois os campos se expressam por

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ , \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \ . \end{cases}$$

Desde o ponto de vista quântico esperamos que, por uma transformação de gauge, os valores esperados $\langle\vec{x}\rangle$ e $\langle\vec{\pi}\rangle$ não mudem. A média $\langle\vec{p}\rangle$ do momentum canônico sí depende do gauge.

Seja então $|\alpha\rangle$ o estado do sistema na presença de $\vec{A}$. Chamamos $|\tilde{\alpha}\rangle$ o correspondente ket que descreve a mesma situação física com a transformação de gauge

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{A} + \nabla\Lambda \, .$$

Tanto $\vec{A}$ como Λ são funções do operador posição $\vec{x}$. Nossos requerimentos básicos são:

$$\langle\alpha|\vec{x}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\vec{x}|\tilde{\alpha}\rangle$$

$$\langle\alpha|\vec{\pi}|\alpha\rangle = \langle\tilde{\alpha}|\vec{\tilde{\pi}}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|(\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A})|\alpha\rangle =$$

$$= \langle\tilde{\alpha}|(\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A} - \tfrac{e}{c}\nabla\Lambda)|\tilde{\alpha}\rangle$$

sendo que os kets devem estar ligados por uma transformação unitária (preserva normas e produtos escalares):

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathcal{U}|\alpha\rangle \quad , \quad \mathcal{U}^{+} = \mathcal{U}^{-1}$$

$$\langle\tilde{\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\mathcal{U}^{+}\mathcal{U}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle \, .$$

As propriedades de invariância requeridas estão garantidas se tivermos:

$$\begin{cases} \mathcal{U}^{+}\vec{x}\,\mathcal{U} = \vec{x} \\ \mathcal{U}^{+}(\vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A} - \tfrac{e}{c}\nabla\Lambda)\mathcal{U} = \vec{p} - \tfrac{e}{c}\vec{A} \end{cases}$$

Solução: $\qquad \mathcal{U} = \exp\left(\dfrac{i\,e\,\Lambda(\vec{x})}{\hbar c}\right)$

Sendo $\Lambda(\vec{x})$ uma função de $\vec{x}$, ela comuta com $\vec{x}$, assim a primeira condição está satisfeita. Vejamos agora

$$\mathcal{U}^{\dagger}\vec{p}\,\mathcal{U} = \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\vec{p}\,\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)$$

Calculamos o comutador:

$$\left[\vec{p}, \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\right] = -i\hbar\,\nabla\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right) = \frac{e}{c}\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\nabla\Lambda$$

Assim:

$$\mathcal{U}^{\dagger}\vec{p}\,\mathcal{U} = \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\vec{p}\,\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\left[\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\vec{p} + \frac{e}{c}\exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\nabla\Lambda\right]$$

$$= \vec{p} + \frac{e}{c}\nabla\Lambda .$$

Assim, simultâneamente com a mudança de gauge $\vec{A}\to\tilde{\vec{A}}$, devemos mudar a função de onda por uma fase:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \exp\left[\frac{ie\Lambda(\vec{x})}{\hbar c}\right]|\alpha\rangle$$

$$\tilde{\psi}_{\alpha}(\vec{x}') = \langle\vec{x}'|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\vec{x}'|\exp\left[\frac{ie\Lambda(\vec{x})}{\hbar c}\right]|\alpha\rangle$$

$$= e^{\frac{ie\Lambda(\vec{x}')}{\hbar c}}\,\psi_{\alpha}(\vec{x}')$$

§ Invariância da Equação de Schrödinger

Se existe dependência no tempo de Λ, a solução é

$$\mathcal{U} = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x},t)\right\},$$

para a transformação de "gauge" completa:

$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda \end{cases}$$

Neste caso $\mathcal{U}$ não comuta com a derivada temporal

$$\partial_t \mathcal{U} = \mathcal{U}\partial_t + \frac{ie}{\hbar c}(\partial_t\Lambda)\mathcal{U}$$

A equação de Schrödinger na presença dos potenciais $(\vec{A},\varphi)$ é:

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi(\vec{x})\right]|\alpha,t\rangle = i\hbar\partial_t|\alpha,t\rangle$$

Aplicamos o operador $\mathcal{U}$ em ambos os lados:

$$\mathcal{U}\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi(\vec{x})\right]\mathcal{U}^{+}\left(\mathcal{U}|\alpha,t\rangle\right) = i\hbar\,\mathcal{U}\partial_t|\alpha,t\rangle$$

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e}{c}\nabla\Lambda)^2 + e\varphi(\vec{x})\right]\widetilde{|\alpha,t\rangle} =$$

$$= i\hbar\left(\partial_t\mathcal{U}|\alpha,t\rangle - \frac{ie}{\hbar c}(\partial_t\Lambda)\mathcal{U}|\alpha,t\rangle\right)$$

$$= i\hbar \partial_t |\widetilde{\alpha, t}\rangle + \frac{e}{c}(\partial_t \Lambda)|\widetilde{\alpha, t}\rangle$$

Em total:

$$\boxed{\left[\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e}{c}\nabla\Lambda\right)^2 + e\left(\varphi(\vec{x}) - \frac{1}{c}\partial_t\Lambda\right)\right]|\widetilde{\alpha, t}\rangle = i\hbar\,\partial_t|\widetilde{\alpha, t}\rangle},$$

que é a eq. de Schrödinger com a mudança de gauge. Para a função de onda temos:

$$\langle\vec{x}'|\exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}, t)\right)|\alpha, t\rangle = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}'; t)\right\}\langle\vec{x}'|\alpha, t\rangle$$

ou

$$\tilde{\psi}_\alpha(\vec{x}'; t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}'; t)}\,\psi_\alpha(\vec{x}'; t)$$

Daqui resulta: $\quad |\tilde{\psi}_\alpha|^2 = |\psi_\alpha|^2$

A densidade de corrente é invariante de gauge:

$$\tilde{\vec{j}} = \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{\psi}^*\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{e}{c}\nabla\Lambda\right)\tilde{\psi}\right]$$

Temos sim:

$$\tilde{\psi}^*\vec{p}\,\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^*\left\{-i\hbar\nabla\left(e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi\right)\right\}$$

$$= \tilde{\psi}^* e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\left(-i\hbar\nabla\psi\right) + \frac{e}{c}\nabla\Lambda\,|\psi|^2$$

$$= \psi^*(-i\hbar\nabla\psi) + \frac{e}{c}\nabla\Lambda|\psi|^2 = \psi^*(\vec{p} + \frac{e}{c}\nabla\Lambda)\psi$$

Assim:

$$\tilde{\vec{J}} = \frac{Re}{m}\left[\psi^*(\vec{p} + \cancel{\frac{e}{c}\nabla\Lambda} - \frac{e}{c}\vec{A} - \cancel{\frac{e}{c}\nabla\Lambda})\psi\right]$$

$$= \frac{1}{m}Re\left[\psi^*(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\psi\right] = \vec{J}$$

§ O efeito de Aharonov - Bohm

Em Mecânica Quântica, os potenciais $(\phi, \vec{A})$ tem um papel mais interessante que em Mecânica Clássica, mesmo quando toda a teoria é invariante de gauge.

Clássicamente o Hamiltoniano é obtido do Lagrangeano por uma transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \sum p\dot{x} - L$$

com $$\dot{x} \longleftrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

Podemos fazer também a operação inversa

$$L(x,\dot{x}) = \sum p(\dot{x})\,\dot{x} - \mathcal{H}(x,\dot{x})$$

Em nosso caso temos : $\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{e}{c}\vec{A}$

Assim :

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \left(m\frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{d\vec{x}}{dt} - \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - e\phi$$

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - e\phi + \frac{e}{c}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$L(\vec{x},\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Se $\phi = 0$, o Lagrangeano na presença do potencial vetorial $\vec{A}$ difere do Lagrangeano livre apenas pelo termo

$$\frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}).$$

A mudança correspondente da ação ao longo de uma dada trajetória é

$$I^{(0)}(t_0,t_1) \longrightarrow I^{(0)}(t_0,t_1) + \frac{e}{c}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

O termo extra pode ser escrito como uma integral de trajetória

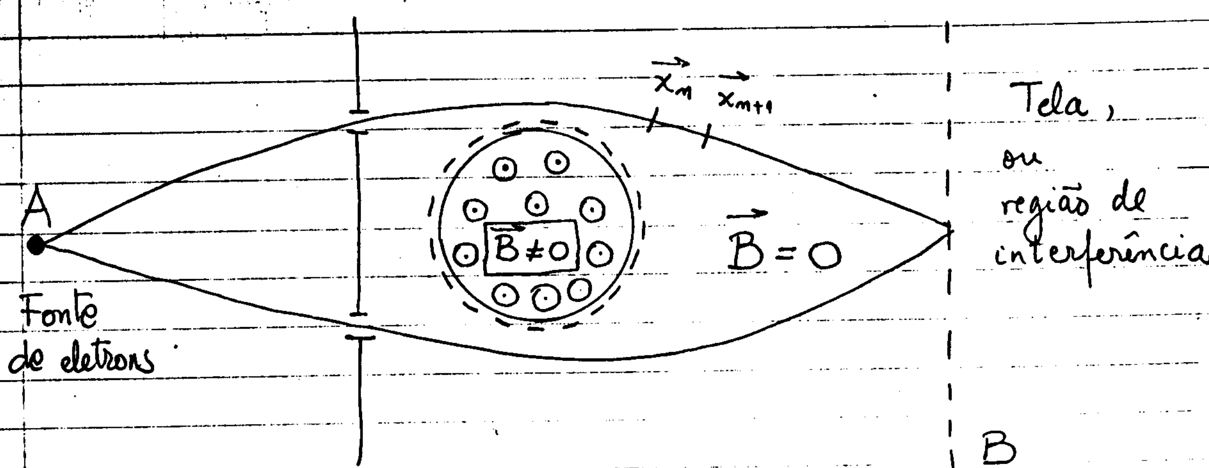
$$\frac{e}{c}\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\vec{v}\cdot\vec{A}) = \frac{e}{c}\int_{t_0}^{t_1} dt\,\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{A} = \frac{e}{c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} d\vec{s}\cdot\vec{A},$$

e para uma trajetória fechada temos

$$\oint_\Gamma d\vec{s}\cdot\vec{A} = \int_S d\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \int_S d\vec{a}\cdot\vec{B} = \Phi_B(S),$$

fluxo do campo magnético através da superfície S. Se o fluxo for nulo, $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}_1} d\vec{s}\cdot\vec{A}$ não depende da trajetória, apenas dos pontos extremos $(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$.

Agora podemos discutir o efeito de Aharonov - Bohm. O campo magnético $\vec{B}$ está restrito ao interior de um cilindro que é impenetrável à passagem de eletrons. As trajetórias eletrônicas vão por cima ou por baixo do cilindro



O campo magnético é estritamente nulo fora do cilindro

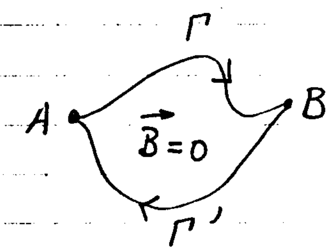
A presença de $\vec{A}$ implica numa mudança da ação para o tramo de $(\vec{x}_n, t_n)$ à $(\vec{x}_{n+1}, t_{n+1})$ dado por

$$I^{(0)}(n,n+1) \longrightarrow I^{(0)}(n,n+1) + \frac{e}{c}\int_{\vec{x}_n}^{\vec{x}_{n+1}} d\vec{s}\cdot\vec{A}$$

e a contribuição completa de $A \to B$ é

$$\prod_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(n,n+1)\right\} \longrightarrow \left[\prod_n \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(n,n+1)\right\}\right] \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}\right\}$$

O anterior refere-se a uma trajetória particular. Na formulação de Feynman devemos somar sobre todas as trajetórias possíveis, o que representa uma tarefa nada trivial e muito trabalhosa. Afortunadamente sabemos que a integração $\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}$ não depende da trajetória, apenas dos pontos extremos, enquanto as correspondentes trajetórias fechadas não encerram fluxo magnético:



$$\oint d\vec{s}\cdot\vec{A} = 0 = \int_\Gamma d\vec{s}\cdot\vec{A} - \int_{\Gamma'} d\vec{s}\cdot\vec{A} \Rightarrow \int_\Gamma d\vec{s}\cdot\vec{A} = \int_{\Gamma'} d\vec{s}\cdot\vec{A}.$$

Assim todas as trajetórias que vão por cima do cilindro tem um fator de fase comum. O mesmo acontece com as trajetórias que vão por baixo do cilindro. A amplitude de probabilidade completa fica mudada como (ver figura anexa)

$$\langle A,t_A | B,t_B\rangle = \int_{\text{Por Cima}} \mathcal{D}[\vec{r}(t)]\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(A,B)\right\} \quad +$$

$$+ \int_{\text{Por Baixo}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(A,B)\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\int_{\text{Por cima}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(A,B)\right\}\right] \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}\right\}_{\text{por cima}} +$$

$$+ \left[\int_{\text{Por baixo}} \mathcal{D}[\vec{x}(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I^{(0)}(A,B)\right\}\right] \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}\right\}_{\text{por baixo}}$$

A probabilidade de encontrar a partícula na região B é dada por $P(A,B) = |\langle A,t_A | B,t_B\rangle|^2$. Os efeitos de interferência quântica dependerão das diferenças de fase entre as trajetórias que vão por cima e por baixo do cilindro. Esta diferença de fase é modificada na presença de $\vec{A}$ por

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{por cima}} - \varphi_{\text{por baixo}}$$

$$= \left\{\frac{e}{\hbar c}\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}\right\}_{\text{por cima}} - \left\{\frac{e}{\hbar c}\int_A^B d\vec{s}\cdot\vec{A}\right\}_{\text{por baixo}}$$

$$= \frac{e}{\hbar c}\oint d\vec{s}\cdot\vec{A} = \frac{e}{\hbar c}\int_S d\vec{a}\cdot\vec{B} = \frac{e}{\hbar c}\Phi_B = 2\pi\frac{e}{hc}\Phi_B$$

onde Φ_B é o fluxo magnético dentro do cilindro impenetrável.

Quando o campo magnético varia aparece uma componente sinoidal de $P(A,B)$ com período dado pela unidade fundamental de fluxo magnético:

$$\Phi_0 \equiv \frac{hc}{|e|} = 4.135 \times 10^{-7} \text{ Gauss-cm}^2$$

Assim

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}.$$

Para campo magnético fixo, o diagrama de interferência é deslocado pela introdução da fase extra que depende de Φ_B.

Como o efeito depende de $\vec{B}$, ele é invariante por uma transformação de gauge em $\vec{A}$!!!

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda ,$$

porque

$$\oint_\Gamma d\vec{s}\cdot\vec{A} \longrightarrow \oint_\Gamma d\vec{s}\cdot\vec{A} + \oint_\Gamma d\vec{s}\cdot\nabla\Lambda$$

e $$\oint_\Gamma d\vec{s}\cdot\nabla\Lambda = \int d\vec{a}\cdot\nabla\times\nabla\Lambda \equiv 0$$

Supercondutores?